

Elektrotechnik – 3. Gleichstrom I

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

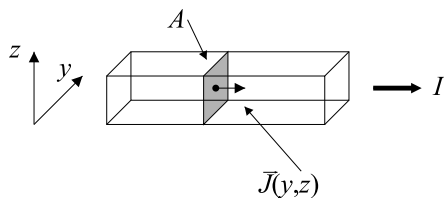
3. Gleichstrom

1. Stromstärke und Stromdichte
2. Stromleitung in Metallen
3. Ohm'sches Gesetz und Widerstand
4. Temperaturabhängigkeit des Widerstands
5. Die Kirchhoff'schen Gesetze
6. Reihen- und Parallelschaltung, Teilerregeln
7. Zweipoltheorie
8. Arbeit und Leistung
9. Reale Messungen im Gleichstromkreis

Elektrischer Strom (*electric current*)

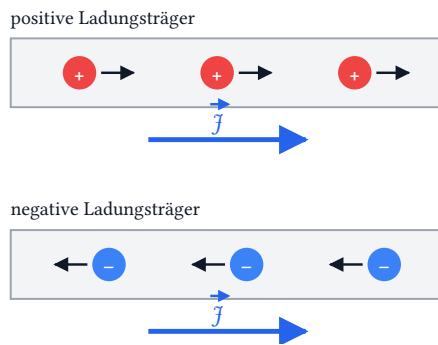
Strom ist der gerichtete Fluss von elektrischer Ladung

- Stromdichte $\vec{J} = \rho_Q \cdot \vec{v}$
 - ρ_Q : Ladungsdichte in $\frac{C}{m^3}$, $\vec{v}$: Geschwindigkeit *positiver* Ladungsträger
- Stromstärke $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{dQ}{dt}$
- $[I] = A = \frac{C}{s}$
- $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$



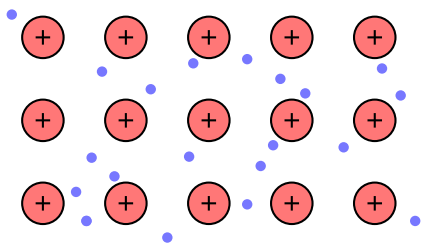
Stromrichtung & Ladungsträger

- $\vec{J} = \rho_Q \cdot \vec{v}$ zeigt in die Richtung, in die sich *positive* Ladung bewegt – egal ob die tatsächlichen Ladungsträger positiv oder negativ sind!
- In Metallen ist $\rho_Q < 0$: die Elektronen bewegen sich *entgegen* $\vec{J}$
- Das ist auch die *Zählrichtung* der Stromstärke I („technische Stromrichtung“)



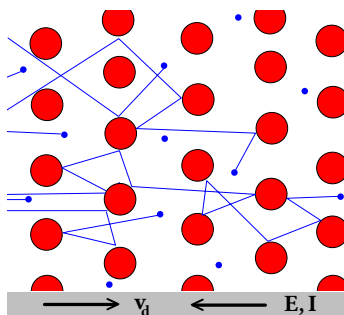
Stromleitung in Metallen

- In Metallen gibt jedes Atom Elektronen ab, die sich frei im Gitter der positiv geladenen Atomrümpfe bewegen können („Elektronengas“)
- Die Ladungsdichte der Elektronen ist jederzeit konstant, da eine Ansammlung ein elektrisches Feld erzeugen würde, das durch Abstoßung der Elektronen wieder ausgeglichen wird → der Leiter ist überall elektrisch neutral



Metalle im elektrischen Feld

Klassisches Bild: erfährt das Elektronengas ein elektrisches Feld, werden die Elektronen beschleunigt, nach kurzer Zeit aber durch Stöße mit dem Metallgitter wieder abgebremst. Im Mittel ergibt sich eine konstante **Driftgeschwindigkeit** $\vec{v}_d$, entgegen der Feldrichtung: $\vec{v}_d = \vec{J} / \rho_Q$ mit $\rho_Q = -ne$.



Zahlenbeispiel: Driftgeschwindigkeit im Kupferdraht

Kupfer, $A = 1 \text{ mm}^2$, $I = 1 \text{ A}$:

- Dichte freier Elektronen: $n \approx 8,5 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$
- Ladungsdichte: $\rho_Q = -n \cdot e \approx -1,36 \cdot 10^{10} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$
- Stromdichte: $|\vec{J}| = \frac{I}{A} = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
- Driftgeschwindigkeit: $|\vec{v}_d| = \frac{|\vec{J}|}{|\rho_Q|} \approx 7,35 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,26 \frac{\text{m}}{\text{h}}$ 🐢

Warum geht das Licht trotzdem sofort an? → Das *Feld* breitet sich (fast) mit Lichtgeschwindigkeit aus, nicht die Elektronen.

Ohm'sches Gesetz (*Ohm's law*)

- Für ein gegebenes Material ist die Stromdichte umso höher, je höher das elektrische Feld ist
- Der Proportionalitätsfaktor ist die elektrische **Leitfähigkeit** σ :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Achtung: die proportionale Beziehung gilt nur für *lineare Leiter* (z.B. Metalle bei konstanter Temperatur)

Ohm'sches Gesetz im linearen Leiter

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

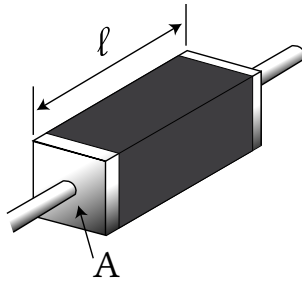
Leiter der Länge l , Querschnitt A , homogenes Feld:

$$I = J \cdot A = \sigma \cdot E \cdot A = \sigma \cdot \frac{U}{l} \cdot A = \frac{U}{R}$$

Elektrischer Widerstand (*electric resistance*):

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A} = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

mit dem **spezifischen Widerstand** $\rho = 1/\sigma$ (ab hier ist ρ immer der spezifische Widerstand, nicht mehr die Ladungsdichte!)



Widerstand und Leitwert

Der elektrische Widerstand R ist definiert durch das Ohm'sche Gesetz:

$$R = \frac{U}{I}, \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (Ohm)}$$

Der elektrische Leitwert G ist der Kehrwert des Widerstands:

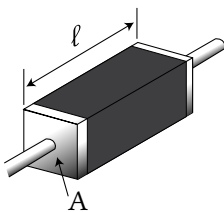
$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}, \quad [G] = \frac{A}{V} = S \text{ (Siemens)}$$

Materialeigenschaften vs. Bauteilgrößen

Materialeigenschaften (unabhängig von der Geometrie): - **Spezifischer Widerstand** ρ -
Leitfähigkeit $\sigma = \frac{1}{\rho}$

Bauteilgrößen (abhängig von der Geometrie): - **Widerstand** $R = \rho \frac{\ell}{A}$ - **Leitwert** $G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{\ell}$

Beispiel: Kupfer hat immer die gleiche Leitfähigkeit $\sigma_{\text{Cu}} = 58 \text{ MS/m}$, aber ein dickeres Kabel hat einen kleineren Widerstand R .



Übersicht der Größen im linearen Leiter

Größe	Definition	Einheit	Name
Spannung (<i>voltage</i>)	$U = \Delta\varphi$	$[U] = \text{V}$	Volt
Stromstärke (<i>current</i>)	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	$[I] = \text{A}$	Ampere
Widerstand (<i>resistance</i>)	$R = \frac{U}{I}$	$[R] = \Omega$	Ohm
Leitwert (<i>conductance</i>)	$G = \frac{1}{R}$	$[G] = \text{S} = \frac{1}{\Omega}$	Siemens
spezifischer Widerstand (<i>resistivity</i>)	$\rho = R \frac{A}{l}$	$[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$	Ohm-Meter
Leitfähigkeit (<i>conductivity</i>)	$\sigma = \frac{1}{\rho}$	$[\sigma] = \text{S/m}$	Siemens pro Meter

Hinweis: In manchen Büchern heißt die Stromdichte S statt J – gemeint ist dasselbe.



Aufgabe 6: Stromdichte & Widerstand

In einer Glühlampe (12 V, Kfz-Blinker) fließt ein Strom $I = 0,5 \text{ A}$.

- Wie groß ist die Stromdichte J_1 im Glühfaden ($d_1 = 100 \mu\text{m}$)?
- Wie groß ist die Stromdichte J_2 in der Zuleitung ($d_2 = 1,5 \text{ mm}$)?
- Ein Kupferdraht hat die Länge $l = 5 \text{ m}$ und den Querschnitt $A = 3 \text{ mm}^2$ ($\rho_{\text{Cu}} = 1,79 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$). Wie groß ist sein Widerstand R ?
- Welchen Widerstand hat ein Draht gleicher Abmessungen aus Aluminium ($\rho_{\text{Al}} = 2,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$)?

Temperaturabhängigkeit des Widerstands

Bei den meisten Materialien ändert sich der Widerstand mit der Temperatur.

Lineare Näherung:

$$R(T) = R(T_0) \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$$

- α : Temperaturkoeffizient, $[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
- T_0 : Bezugstemperatur (üblicherweise 20°C oder 0°C)

Leitfähigkeit verschiedener Materialien

Bei Leitern nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur zu ($\alpha > 0$).

Typische Werte bei 20 °C:

Leitermaterial	ρ ($\mu\Omega\cdot\text{m}$)	σ (MS/m)	α (1/K)
Silber	0,016	63	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	0,017	58	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	0,027	38	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Messing	0,062	16	$2,0 \cdot 10^{-3}$

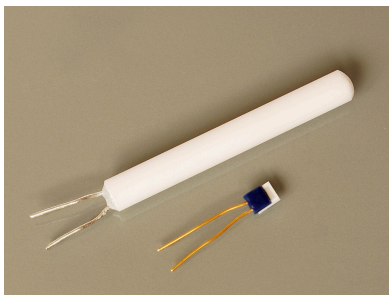
Metalle als Temperatursensoren

Die Temperaturabhängigkeit macht Metalle zu präzisen Temperatursensoren.

Platin-Widerstandsthermometer (Pt100): - $R(0^\circ\text{C}) = 100\ \Omega$ - $\alpha_{\text{Pt}} = 3,85 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$

Vorteile: hohe Langzeitstabilität, Messbereich -200°C bis $+850^\circ\text{C}$, gute Linearität

Anwendung: aus gemessenem R (oder U bei bekanntem Strom) die Temperatur bestimmen ($\rightarrow$ Woche 5).

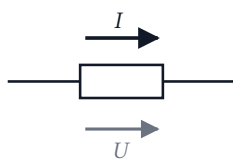


Zählpfeile: Vorzeichen festlegen

Vor dem Rechnen bekommt **jede** Spannung und **jeder** Strom eine Zählrichtung – frei wählbar, ab dann verbindlich. Ein negatives Ergebnis heißt einfach: es fließt andersherum.

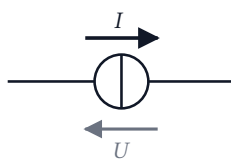
- **Verbraucherzählpfeilsystem:** U und I am Bauteil gleichsinnig (Widerstände)
- **Erzeugerzählpfeilsystem:** U und I gegensinnig (Quellen)
- **Beim Maschenumlauf:** Pfeil in Umlaufrichtung $\rightarrow$ positiv zählen, sonst negativ

Verbraucher



gleichsinnig $\rightarrow P > 0$: nimmt auf

Erzeuger

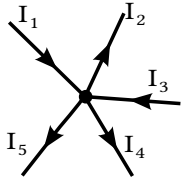


gegensinnig $\rightarrow P > 0$: gibt ab

Knotenpunktregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz)

In einem Knotenpunkt kann weder Ladung gespeichert noch erzeugt werden. Die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller abfließenden Ströme:

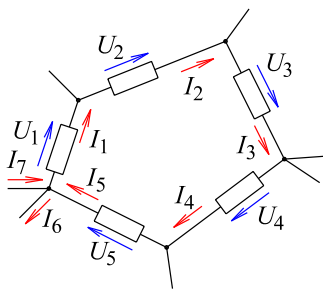
$$\sum_k I_k = 0$$



Maschenregel (2. Kirchhoff'sches Gesetz)

Die Summe aller in einer Masche auftretenden Spannungen ist Null:

$$\sum_k U_k = 0$$



Wie viele unabhängige Gleichungen gibt es?

Netzwerk mit k Knoten und z Zweigen:

- **Unabhängige Knotengleichungen:** $k - 1$ (die letzte Knotengleichung folgt aus den anderen)
- **Unabhängige Maschengleichungen:** $z - (k - 1)$

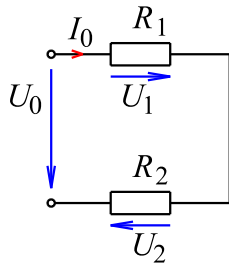
Zusammen: z Gleichungen für z unbekannte Zweigströme ✓

Beispiel: 2 Knoten, 3 Zweige $\rightarrow$ 1 Knotengleichung + 2 Maschengleichungen

Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

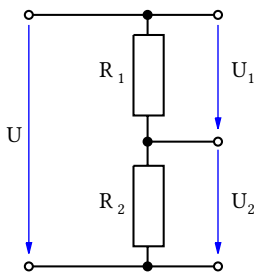
- Gleicher Strom durch alle Widerstände: $I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$
- Gesamtspannung = Summe der Einzelspannungen
- Gesamtwiderstand > größter Einzelwiderstand



Spannungsteiler

Bei einer Reihenschaltung teilt sich die Gesamtspannung im Verhältnis der Widerstände auf:

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

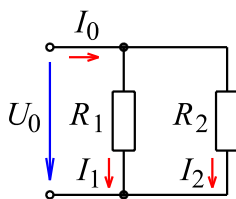


Parallelschaltung von Widerständen

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n G_i$$

- Gesamtstrom = Summe der Einzelströme (Knotenregel!)
- Gleiche Spannung an allen Widerständen
- Gesamtwiderstand < kleinster Einzelwiderstand

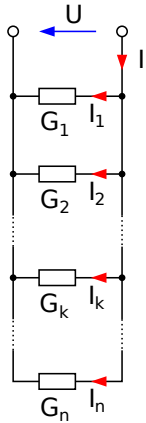
Herleitung: $I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_1} + \dots + \frac{U}{R_n} \stackrel{!}{=} \frac{U}{R_{\text{ges}}}$



Stromteilerregel

Bei einer Parallelschaltung teilt sich der Gesamtstrom im umgekehrten Verhältnis der Widerstände bzw. im direkten Verhältnis der Leitwerte auf:

$$\frac{I}{G_{\text{ges}}} = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \dots = \frac{I_n}{G_n}$$



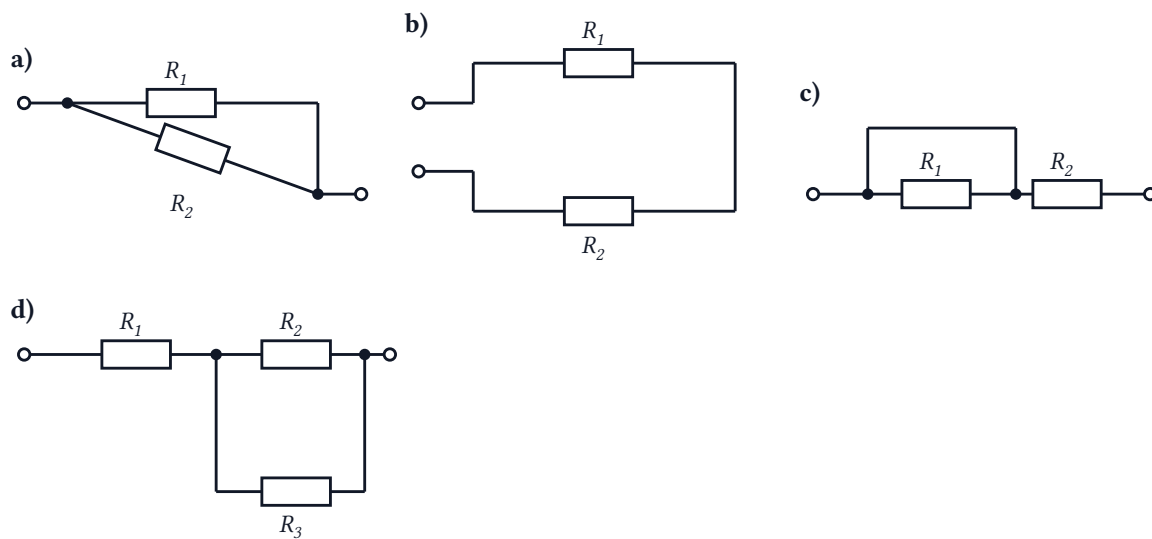
Reihe oder parallel? So erkennt man es *wirklich*

- **In Reihe** $\Leftrightarrow$ beide führen zwingend **denselben Strom** $\Leftrightarrow$ zwischen ihnen liegt **kein Knoten mit Abzweig**
- **Parallel** $\Leftrightarrow$ beide hängen an **denselben zwei Knoten** $\Leftrightarrow$ an beiden liegt zwingend **dieselbe Spannung**

⚠ Wie die Schaltung *gezeichnet* ist, bedeutet **gar nichts!**

Methode: Knoten markieren (einfärben/nummerieren) $\rightarrow$ alle Punkte, die nur durch Draht verbunden sind, sind *derselbe* Knoten $\rightarrow$ dann neu zeichnen.

🤔 Reihe, parallel – oder keins von beidem?



Aufgabe 7: Spannungsteiler

Ein Spannungsteiler besteht aus $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ an einer Quelle $U = 12 \text{ V}$. Am Abgriff (über R_2) wird die Spannung U_a abgenommen. **Zeichnen Sie die Schaltung selbst!**

- Wie groß ist U_a im Leerlauf (kein Verbraucher angeschlossen)?
- Nun wird ein Verbraucher $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ an den Abgriff angeschlossen (parallel zu R_2). Wie groß ist U_a jetzt?
- Wie viele Knoten, Zweige und unabhängige Gleichungen hat die Schaltung aus b)?

Zwischenstand & Ausblick

Heute:

- Strom = Ladungstransport; $I = dQ/dt$, Stromdichte $J = I/A$
- Ohm: $R = U/I = \rho l/A$ – Material (ρ) $\times$ Geometrie (l/A)
- $R(T)$: linear mit Temperaturkoeffizient $\alpha \rightarrow \text{Pt100-Sensor}$
- Kirchhoff: $\sum I_k = 0$ (Knoten), $\sum U_k = 0$ (Masche); $k - 1$ unabhängige Knotengleichungen
- Teilerregeln: Spannung $\propto R$ (Reihe), Strom $\propto G$ (parallel)
- Ein belasteter Spannungsteiler bricht ein!

Nächste Woche: Quellen und Zweipoltheorie – jedes lineare Netzwerk schrumpft auf zwei Kenngrößen.